實驗：亥姆霍茲線圈磁場(Magnetic field of Helmholtz coil)

編者：國立清華大學物理系 戴明鳳教授，施宙聰教授

一、目的：

環形亥姆霍茲線圈(Helmholtz coil)和螺旋線圈(solenoidal coil；又稱螺線管)常用來提供實驗時所需的均勻磁場，本實驗探討環形亥姆霍茲線圈所提供的磁場在空間中的分佈情形和均勻度，以及其優缺點。

二、原理：

1. 何謂亥姆霍茲線圈？

亥姆霍茲線圈是為紀念德國物理學家赫門·梵·亥姆霍茲(Hermann von Helmholtz, 1821-1894)而得名。亥姆霍茲線圈的基本結構，如圖1所示，有下列幾個特點：

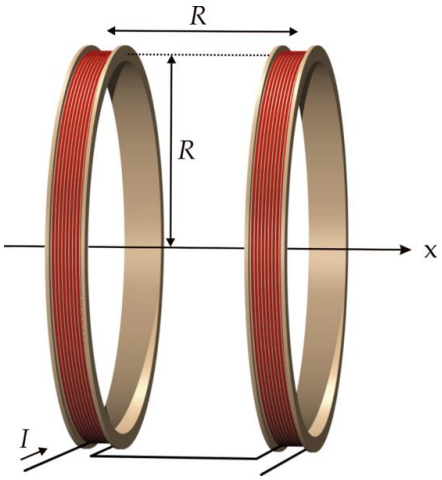
(1) 由兩個結構與大小完全相同的環形線圈組合而成；

(2) 兩線圈面平行並且共軸；

(3) 兩線圈之中心點間的距離等於環形線圈的半徑；

(4) 兩線圈內通入方向相同、大小相同的電流。

如此的設計可使兩環形線圈的中間區域，獲得最佳的均勻磁場(以下簡稱均場)。因由雙線圈所組成，故也稱為亥姆霍茲線圈對(Helmholtz coil pair)。



亥姆霍茲線圈(對)：

1. 兩個完全相同的環形線圈(線圈半徑為)；
2. 通過線圈圓心的兩垂直中心軸共軸；
3. 兩線圈的中心點距離等於線圈半徑 R；
4. 兩線圈流通的電流量大小相同，方向也相同。

圖1 亥姆霍茲線圈的結構圖，由兩個完全相同的環形磁性線圈共軸且對稱地座落在實驗空間的左右兩側，並使兩線圈之中心點間的距離等於環形線圈的半徑 R。(http://en.wikipedia.org/wiki/File:Helmholtz_coils.png)

以下簡單探討單一線圈和雙線圈組所產生的磁場強度在空間中的變化。

2.單一N匝線圈

半徑為R的單一N匝線圈如圖2所示，在線圈中心軸上的磁場(on-axial magnetic field)為

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 NIR^2}{2(x^2 + R^2)^{3/2}} \hat{x} \qquad (1)$$

式中$\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}$ T·m/A = 1.26×10^{-6} T·m/A 為真空或自由空間的導磁係數(permeability)；I為線圈中流通的電流，以安培(A)為單位；x為距線圈中心的垂直距離，以公尺為單位；$\hat{x}$ 為軸向的單位向量。

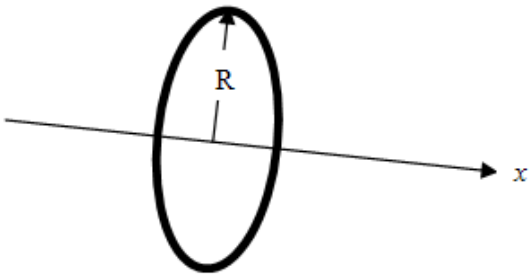
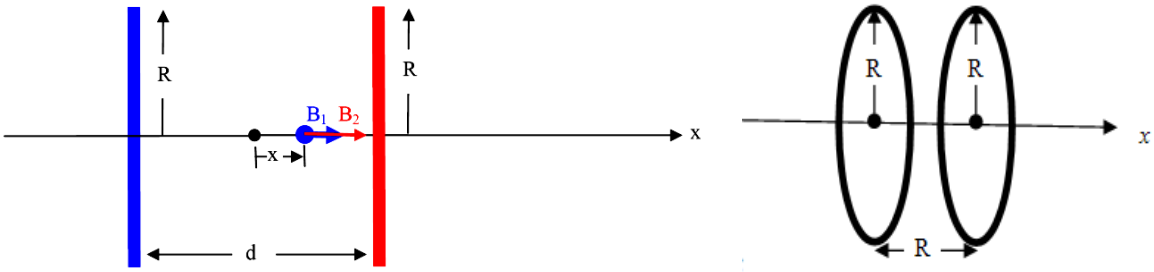


圖2 由N圈回路線圈纏繞成半徑為R的單一環形線圈。

3. 環形亥姆霍茲線圈

如圖3，兩線圈以共軸方式組合後，則中心軸上的磁場為來自每一線圈之個別磁場的總合。設兩線圈的中心點為原點(x=0)，則在中心軸上距原點 x的軸向磁場大小為

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 NIR^2}{2\left[(\frac{d}{2} - x)^2 + R^2\right]^{\frac{3}{2}}}\hat{x} + \frac{\mu_0 NIR^2}{2\left[(\frac{d}{2} + x)^2 + R^2\right]^{\frac{3}{2}}}\hat{x}$$



(a) (b)

圖3 (a)兩個場線圈面對面平行架設，線圈兩中心點相距距離d。(b)亥姆霍茲線圈示意圖，兩線圈的距離等於線圈半徑(即$d = R$)。

若兩線圈分開的距離d與線圈半徑R相同時，稱之為亥姆霍茲線圈，如圖3(b)所示。此時在兩線圈間的空間會產生一近似均勻的磁場，在兩線圈中間處（$x = 0$）的磁場為

$$\vec{B} = \frac{8\mu_0 NI}{\sqrt{125}R}\hat{x}$$

亥姆霍茲線圈中心空間處的磁場分佈有最佳的均勻度(即$d^2B/dx^2 = 0$，d^2B/dx^2可作為磁場強度在x方向不均勻度的指標)；但中心處和在線圈面上的磁場強度會有約7%的變化量，如圖4和圖5所示。若使 d略大於 R，雖可降低線圈面和中心處之磁場強度的差異，但卻會使得中心區域之磁場強度均勻度變差。若擬推導在空間中每一位置的磁場，理論計算過程相當複雜，必需使用到特殊函數—Bessel 函數，此推導超過大一學生的數學能力。

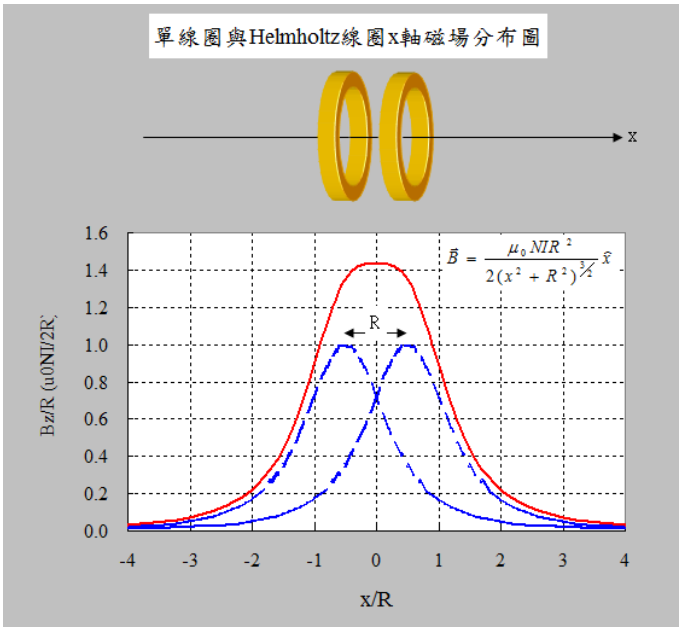


圖 4 單線圈與 Helmholtz 線圈中心軸磁場分佈圖。

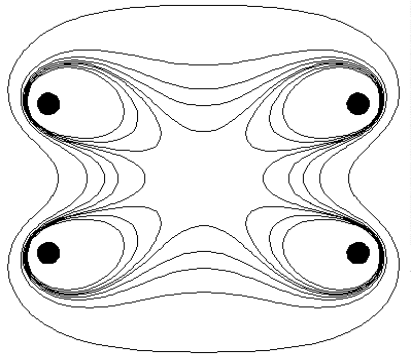


圖 5 Helmholtz 線圈的等磁場強度線。若中心點的磁場強度為 B_o，圖中由中心往外的第一圈八角形封密曲線內的空間磁場強度變化量<1%。從中心往外的五個曲線，分別表示磁場為 $0.99B_o$, $0.95B_o$, $0.90B_o$, $0.8B_o$ 和 $0.5B_o$ 的等磁場強度線。(資料引用來源：http://en.wikipedia.org/wiki/Helmholtz_coil.)

故當實驗中需要均勻磁場時，常使用環形亥姆霍茲線圈提供所需的均勻磁場。在某些不希望存在磁場的實驗，也常運用亥姆霍茲線圈所產生的磁場來抵消地磁，提供一個磁場強度趨近零的空間。

3. 反亥姆霍茲線圈 (Anti-Helmholtz coil)

將亥姆霍茲線圈兩線圈的電流反向，即成為反亥姆霍茲線圈，如圖6所示，其產生的磁場在兩線圈中間處為零，且在中心處對稱軸上磁場具有0.858 $_0I/a^2$的線性梯度。在冷原子的實驗中經常利用反亥姆霍茲線圈來產生磁光陷阱(MOT; magneto-optic trap)所需要的磁場分佈，有興趣的同學可以參考物理系余怡德教授網頁中科普文章(http://atomcool.phys.nthu.edu.tw/publications.html#general)。

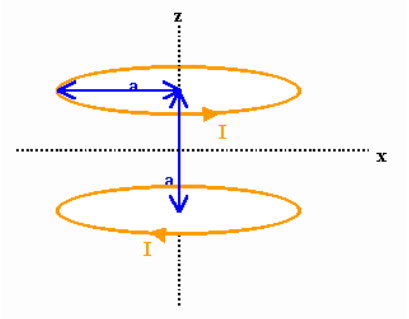


圖6 反亥姆霍茲線圈 (Anti-Helmholtz coil)

4. 交流磁場量測

如線圈的電流是交流($I=I_0\cos\ t$)，則在空間會產生隨時間變化的磁場($B=B_0\cos\ t$)，其振幅B_0等於I_0產生的磁場。此交流磁場可以在一個小線圈產生感應電動勢，其大小正比於此小線圈軸上的磁場分量，也就是說我們可以利用一線圈來測量交流磁場，這個線圈又稱為拾波線圈(pick-up coil)。為了增加感應電動勢的信號，通常會利用LC共振原理來放大信號，線路如圖7所示。本實驗將使用一10 mH的拾波線圈和一0.1 F的電容串聯的共振拾波線圈測量環形線

圈中心軸的磁場分佈，其共振頻率約為5 kHz。

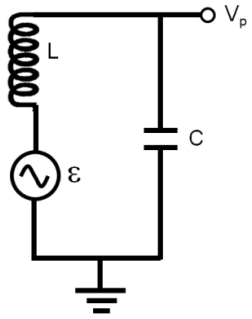


圖7 共振拾波線圈線路圖，ε為感應電動勢。

三、儀器

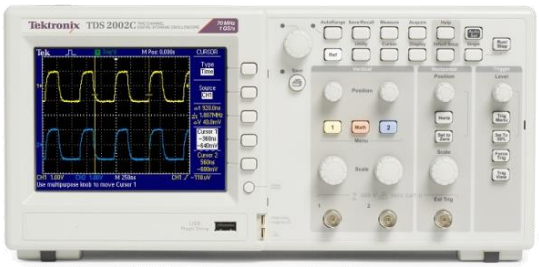
線圈基座、場線圈 x2、跳線、小型基座、支撐桿 、直流電源供應器、數位電表、Arduino套件(含Arduino Uno, 霍爾感測器及超音波測距器)、KENWOOD AG203D訊號產生器、共振拾波線圈(resonant pick-up coil)、數位示波器。

本實驗所使用的場線圈總匝數 $N = 200$圈，平均半徑$R = 10.25$ cm，電流容許最大值2A。

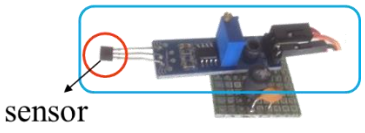
線圈及其基座

直流電源供應器

訊號產生器

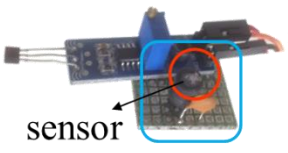


數位示波器



霍爾感測器(Arduino)

Arduino控制盒



共振拾波線圈(resonant pick-up coil)

四、步驟

(1) 單一線圈的磁場測量

A. 直流量測 - 利用Arduino + 超音波測距器 + 霍爾感測器

1. 實驗進行前，請先在電腦中安裝Arduino Uno 驅動程式及終端機程式CoolTerm.
   程式網址：Arduino Uno 驅動程式：
   ---Mac: http://www.wch.cn/download/CH341SER_MAC_ZIP.html
   ---Windows: http://www.wch.cn/download/CH341SER_EXE.html
   CoolTerm 程式(Win/Mac均有)： http://freeware.the-meiers.org

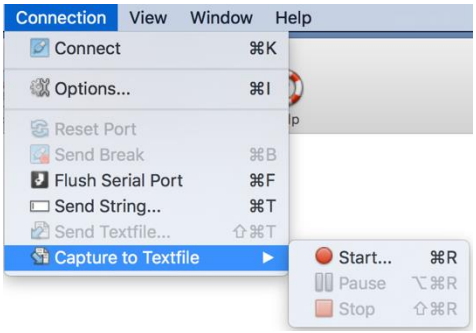
2. 如圖8所示，將一個場線圈固定在線圈基座上。將電流限流設在1.6 A，並將之與電源供應器的電流輸出端及線圈的兩電流輸入端，以串聯方式連接在一起(不經過線圈內部電阻)。此時直流輸出為關閉（ Output off ）

(a) (b)

圖8 單一線圈磁場測量的儀器架構圖：(a)示意圖和(b)儀器架設。

3. 如圖8 (b)所示，將霍爾感應器架設在支桿(架)上，支桿約伸出30公分。調整支撐桿的高度與位置，以使霍爾磁場感應器對正線圈的中心點。
4. 如圖8 (b)所示，將Arduino 及超音波測距器放置於三角架底部，並將超音波測距器對正線圈平台前方之白板。
5. 將線圈平台至於距離霍爾感測器約10公分，將Arduino以USB線連接至電腦。
6. 電腦中，執行CoolTerm軟體，並選擇適當序列埠後，執行工具列上Connect指令讀取數據，螢幕上應該看到視窗中，已經有數據讀入，此時讀入的磁場為背景值，距離則為三角架到線圈平台之距離。
7. 執行CoolTerm工具列上Connection -> Capture to Textfile -> Start , 開始擷取Arduino 傳入之資料。
8. 將直流電源供應器調整適當的端電壓，輸出固定電流1.6 A到場線圈內。場線圈可容許的最

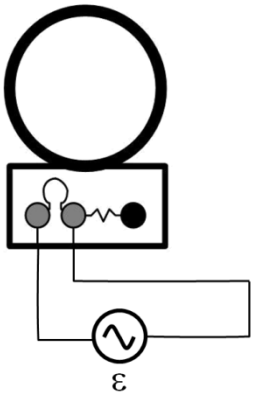
大電流量不得超過2 A，否則會燒毀線圈。以數位電表讀取準確的電流值，並記錄電流值。此時電流輸出至線圈，產生磁場。



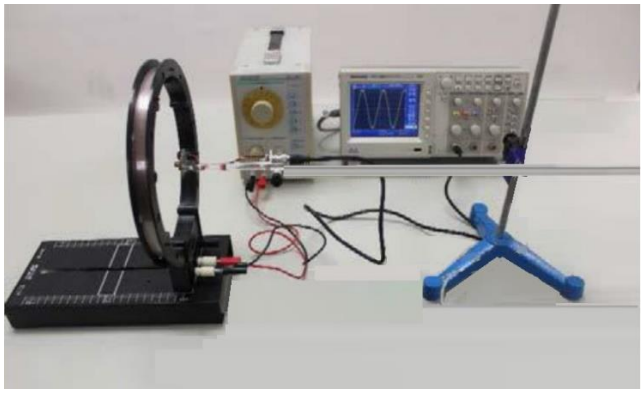
9. 移動線圈平台，使線圈平台穿過霍爾感測器直到離開霍爾感測器10 cm處，關閉輸出電流。
10. 執行CoolTerm工具列上Connection -> Capture to Textfile -> Stop，將數據存入電腦中的文字。
11. 將文字檔利用Excel 中資料滙入功能存入Excel中，進行磁場分佈繪圖(XY Plot)

B. 交流量測 - 利用共振拾波線圈

1. 將KENWOOD AG203D訊號產生器輸出與線圈連接(不經過線圈內部電阻)，拾波線圈輸出接到示波器CH1(如圖9所示)。



(a)



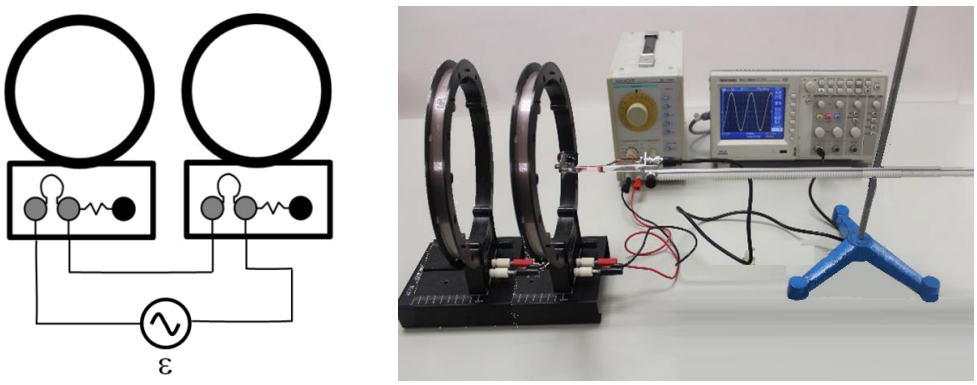
(b)

圖9 交流量測儀器示意圖(a)和儀器架構圖(b)

2. 將訊號產生器輸出波形設為正弦波，輸出振幅調至最高，頻率設在5 kHz附近，你應可以在示波器上看到弦波信號。
3. 改變訊號產生器頻率使共振拾波線圈輸出信號為最大，移動線圈位置，觀察數位示波器測量信號($V_{p\text{-}p}$)隨線圈中心軸位置的變化。
4. 將信號$V_{p\text{-}p}$對位置做圖，與實驗步驟A的結果比較。

(2) 亥姆霍茲線圈

1. 將兩個完全相同的場線圈和所需的實驗器材如圖10所示組裝於基座和支撐架上，並使兩場線圈相距約5 cm，並記錄下準確的距離。
2. 串聯兩線圈，使兩線圈電流方向為同向。
3. 利用拾波線圈測量磁場隨中心軸位置的變化。儀器架設同實驗步驟(1) B交流量測。
4. 調整兩線圈間距使之等於線圈半徑(R = 10.25 cm)，量測兩線圈距離。重覆實驗步驟2。
5. 調整兩線圈間距使之約等於14.5 cm，量測兩線圈距離。再實驗步驟2。
6. 比較兩場線圈在三種不同間距下，所產生之磁場分佈的結果。特別比較磁場在空間中的變化趨勢和均勻度。



(a) (b)

圖10 亥姆霍茲線圈磁場測量實驗儀器組裝圖 (a)示意圖，(b)儀器架設。

(3) 反**亥姆霍茲線圈 (optional)**

1. 將兩個完全相同的場線圈和所需的實驗器材如圖10所示組裝於基座和支撐架上，調整兩線圈間距使之等於線圈半徑(R = 10.25 cm)，量測兩線圈距離，並記錄下準確的距離。
2. 串聯兩線圈，使兩線圈電流方向為反向。
3. 利用拾波線圈測量磁場隨中心軸位置的變化。儀器架設同實驗步驟(1) B交流量測。

五、問題：

1. 線圈的半徑越大是否可得到越寬廣的均場空間？磁場的均勻度會如何變化？變好還是變差？請以R = 5.0, 7.5, 10.0, 20.0 cm 的條件，帶入理論公式比較$B(x)$的變化和單位長度內的磁場均勻度。
2. 亥姆霍茲線圈和螺旋管線圈是常被用以提供均勻磁場的裝置，對於具有相同線圈半徑和相同尺寸比例(aspect ratio)的亥姆霍茲線圈和螺旋管線圈，請比較兩類線圈沿著軸向所產生之磁場的分佈情形。並比較何者所產生的磁場的均勻度較佳。可考慮亥姆霍茲線圈內的兩線圈之半徑為R，間距為d；螺旋管線圈的半徑亦為R，管長度$L = d$ 時；兩磁場產生器在中心軸上的磁場變化情形。[參見附錄一]
3. 比較直流量測和交流量測的優缺點。

參考文獻：

1. “Helmholtz coil”, Wikipedia web site: http://en.wikipedia.org/wiki/Helmholtz_coil.
2. 國立台灣師範大學物理系物理教學示範實驗教室網站物理問題討論區(黃福坤教授)：http://forum.phy.ntnu.edu.tw/demolab/phpBB/viewtopic.php?topic=7905
3. On-Axis Field of an Ideal Helmholtz Coil: http://www.netdenizen.com/emagnet/helmholtz/idealhelmholtz.htm
4. *Helmholtz-Coil Fields* by Franz Kraft, The Wolfram Demonstrations Project.
5. Kevin Kuns (2007),Calculation of Magnetic Field inside Plasma Chamber, uses elliptic integrals and their derivatives to compute off-axis fields, from PBworks.
6. DeTroye, David J.; Chase, Ronald J. (November 1994), *The Calculation and Measurement of Helmholtz Coil Fields*, Army Research Laboratory, ARL-TN-35
7. http://physicsx.pr.erau.edu/HelmholtzCoils/

附錄一

亥姆霍茲線圈內的兩線圈之半徑為 R，間距為 d；螺旋管線圈的半徑亦為 R，管長度 $L=d$ 時；兩磁場產生器在中心軸上的磁場變化情形。

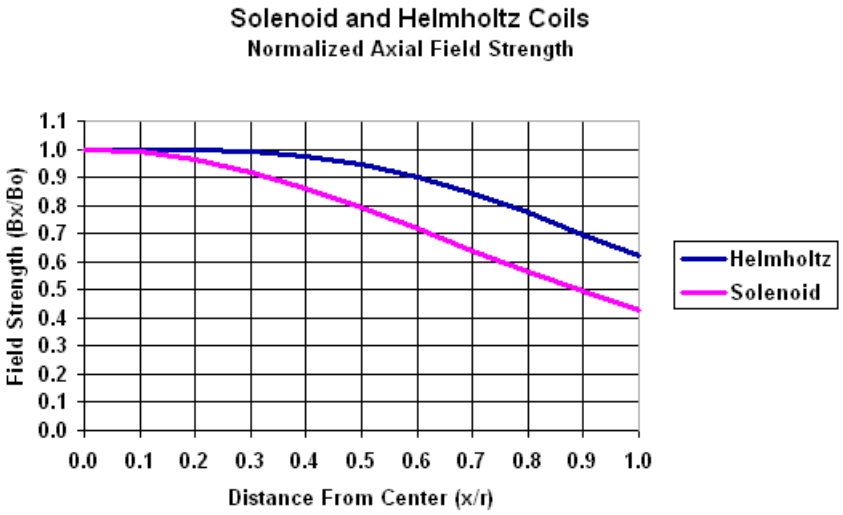


圖 10 亥姆霍茲線圈和螺旋管線圈兩磁場產生器在中心軸線上的磁場變化情形。
http://www.netdenizen.com/emagnet/helmholtz/idealhelmholtz.htm